数理解析研究所講究録
1067巻 1998年 96-107

Ahlfors函数の拡張とNehari問題

香川医大 上原正宏 (Masahiro Uehara)

0. 序. 核函数の理論において「集合E上の函数からなるHilbert空間Hの再生核$K(x,y)$はpositive matrixである. つまりEの任意の点$\{x_j\}_{j=1}^n$と任意の複素数$\{\alpha_j\}_{j=1}^n$に対して

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_j \overline{\alpha_k} K(x_k, y_j) \geqq 0$$

を満たす. 逆にE上の任意のpositive matrix $K(x,y)$に対して, $K(x,y)$を再生核とするHilbert空間H_kが唯一つ存在する.」と云うことはよく知られている事実である([S]). このことはHilbert空間と再生核が1対1の対応をしていることを意味している.

一方再生核の随伴L核(以後単にL核という)については, そのような特徴付けは知られていない. またL核の本質的な特性は何か? ということも分かっていない. 例えばweighted Bergman空間においてはL核の定義すら為されていない. 従って「L核とは何か?」, 「L核を如何に定義するか?」, 「既存のL核の諸々の性質の中で最も基本的な性質は何か?」等という問題が自然に提起される. ここでは2つのL核, つまりGarabedian核$L(z,t)$

と weighted Garabedian 核 $L_\lambda(z,t)$ の差異の一つを示す「z の函数として核 $L_\lambda^{[n]}(z,t)$ が零点をもたないような領域と weight を特徴付けよ.」という Nehari 問題について言及する. この問題が解けるとそれ自身興味深い多くの性質をもち, 等角写像論, 極値問題等で著しい応用を持つ Ahlfors 函数の自然な拡張が得られる. このことは Nehari 問題の重要性を示す一例でもある.

1. 記号と基本的事実. D を複素平面上の有界な p 連結領域, ∂D を互いに素な p 個の解析的 Jordan 曲線からなる D の境界, $\lambda(z)$ を ∂D 上の正値連続函数, $A(D)$ を D 上の正則函数の族, $H_2(D)$ を D 上の解析的 Hardy 族, $H_\lambda^2(\partial D)$ を次のノルム $\|\cdot\|_\lambda$ が有限である weighted Szegő 空間とする

$$\|f\|_\lambda=\left\{\int_{\partial D}|f(z)|^2\,\lambda(z)\,|dz|\right\}^{1/2}<\infty,\ f\in H_\lambda^2(\partial D)\,.$$

ここに $f(z)$ は Fatou の意味の nontangential 境界値である.

$H_\lambda^2(\partial D)$ には weighted Szegő 核 $K_\lambda(z,\bar t\,)$ および weighted Garabedian 核 $L_\lambda(z,t)$ が一意的に存在する ([N]). 核 $K_\lambda(z,\bar t\,)$ は $(z,t)\in D\times D$ に対し $(z,\bar t\,)$ の解析函数であり, $H_\lambda^2(\partial D)$ の任意の函数 $f(z)$ に対して次の再生性を持つ

$$\int_{\partial D}f(z)\overline{K_\lambda\,(z,\bar t\,)}\lambda(z)\,|dz|=f(t),\ f\in H_\lambda^2(\partial D)\,.$$

また核 $L_\lambda(z,t)$ は対角線成分を除き $(z,t)\in D\times D$ の解析函数であり, $z=t$ で留数 $1/2\pi$ の 1 位の単一極を持ち, $H_\lambda^2(\partial D)$ の任意

の函数 $f(z)$ に対して次の直交性を持つ

$$\int_{\partial D} f(z)\overline{L_\lambda(z,t)}\frac{1}{\lambda(z)}\,|dz| = 0,\ f \in H_\lambda^2(\partial D)\,.$$

これら２つの核 $K_\lambda(z,\bar{t})$ と $L_\lambda(z,t)$ は各 $t \in D$ に対して z の函数として ∂D 上に連続に拡張され, 境界上では次の関係で結ばれている

$$\overline{K_\lambda(z,\bar{t})}\lambda(z)\,|dz| = \frac{1}{i}L_\lambda(z,t)dz,\ z \in \partial D,\ t \in D\,.$$

また斎藤が精力的に研究したHardy H_2 核およびその共役核は, $\lambda(z)$ が次式で与えられる我々の特別な場合である ([S])

$$\lambda(z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n} \text{および} \lambda(z) = \frac{1}{2\pi}\Big/\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial n}\,.$$

ここに $G(z,\zeta)$ は ζ を極とするの Laplace 方程式の Green 函数であり, $\frac{\partial}{\partial n}$ は D に関する内法線方向の微分である.

領域 $D \times D$ で定義された (z,t) の解析函数 $F_\lambda(z,t)$ について高次の導函数を次のように定義する

$$F_\lambda^{mn}(z,t) = \frac{\partial^{m+n}F_\lambda(z,t)}{\partial z^m \partial t^n},\, F_\lambda^{[n]}(z,t) = F_\lambda^{0n}(z,t)\,.$$

特に $n=0,\ \lambda=1$ の場合には $[0], 1$ を省略する.

高次導函数の場合にも２つの核 $K_\lambda^{[n]}(z,\bar{t})$ と $L_\lambda^{[n]}(z,t)$ は次の境界関係式を満たしている

$$\overline{K_\lambda^{[n]}(z,\bar{t})}\lambda(z)\,|dz| = \frac{1}{i}L_\lambda^{[n]}(z,t)dz, z \in \partial D,\ t \in D\,.$$

この境界関係式に偏角の原理を適用すると次の補題を得る.

補題 1([U]). z の函数として2つの核 $K_\lambda^{[n]}(z,\bar{t})$ と $L_\lambda^{[n]}(z,t)$ の領域 D 内における零点の総数は $n+p-1$ をこえない.

ここで以後重要である3つの概念を導入する([U]).

定義 1. 領域 D 内に零点を持たない D 上正則で ∂D 上連続な函数 $P(z)$ が存在し ∂D 上 $|P(z)|^2=\lambda(z)$ を満たすとき, $\lambda(z)$ は族 W_0 に属するという. 以後簡単に $\sigma(z)=1/\lambda(z),\ Q(z)=1/P(z)$ と書くことにする.

定義 2. $\lambda(z)$ が W_0 に属するとき, 対応する正則函数 $P(z)$ が D 内のある点 a に対して $P(a)\neq 0,\ P'(a)=\cdots=P^{(n)}(a)=0$ を満たすとき, $\lambda(z)$ は族 $W_n(n \geqq 1)$ に属するという.

定義 3. 領域 $D\times D$ で定義された函数 $F(z,t)$ に対して $F(a,t)=0$ が任意の $t\in D$ について成立するような点 $z=a$ が存在するとき, $z=a$ を $F(z,t)$ の第一種の零点という.

定義1,2から次の補題が得られる([N],[U]).

補題 2. (1) 単連結領域 D では任意の $\lambda(z)$ は W_0 に属する.

(2) $\lambda(z)$ が W_0 に属するとき次の等式が成立する.

$$K_\lambda(z,\bar{t}) = Q(z)\overline{Q(t)}K(z,\bar{t}),\ L_\lambda(z,t) = P(z)Q(t)L(z,t).$$

(3) $\lambda(z)$ が W_n に属するとき次の等式が成立する.

$$K_\lambda^{[n]}(z,\bar{a}) = Q(z)\overline{Q(a)}K^{[n]}(z,\bar{a}),\ L_\lambda^{[n]}(z,a) = P(z)Q(a)L^{[n]}(z,a).$$

函数 $f(z)$ を単連結領域 D から単位円 U の上への Riemann の写像函数とするとき, 領域 D の Szegő 核 $K(z,\bar{t})$, Garabedian 核 $L(z,t)$ は各々次のように表わされる ([B])

$$K(z,\bar{t}) = \frac{\sqrt{f'(z)}\sqrt{\overline{f'(t)}}}{2\pi\left(1 - f(z)\overline{f(t)}\right)},\ L(z,t) = \frac{\sqrt{f'(z)}\sqrt{f'(t)}}{2\pi(f(z) - f(t))}.$$

このことから次の補題が得られる ([U]).

補題 3. 単連結領域 D において次の等式が成立する.

$$K^{[1]}(z,\bar{t}) = K(z,\bar{t})R(z,\bar{t}),\ R^{[1]}(z,\bar{t}) = R(z,\bar{t})^2 + \frac{1}{2}\overline{\{f,t\}},$$

$$\left\{\frac{K(z,\bar{t})}{K(a,\bar{t})}\right\}^{[1]} = \frac{K(z,\bar{t})}{K(a,\bar{t})}(R(z,\bar{t}) - R(a,\bar{t})) = 2\pi\frac{K(z,\bar{t})^2}{L(z,a)}.$$

ここに

$$R(z,\bar{t}) = \frac{1}{2}\left(\overline{\frac{f''(t)}{f'(t)}}\right) + \frac{f(z)\overline{f'(t)}}{1 - f(z)\overline{f(t)}},\ \{f,t\} = \frac{f'''(t)}{f'(t)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(t)}{f'(t)}\right)^2$$

である．($\{f,t\}$ は $f(t)$ の Schwarz 導函数である).

2. Nehari 問題. 補題 1 から次の問題が自然に提起される．

問題 1. z の函数として核 $L_\lambda^{[n]}(z,t)$ が零点を持たない領域 D と weight$\lambda(z)$ を特徴付けよ．

ある種の極値問題に関連して, 1950 年 Nehari は $n=0$ の場合のこの問題を提唱した ([N]). 従って我々はこの問題を Nehari 問題とよぶ．Nehari 問題を考察する主な理由は

(1) 古典的核函数と weight のついた核函数の本質的な違いは何か？つまり weight $\lambda(z)$ を考えることの必然性を質すこと．

(2) Ahlfors 函数の概念の拡張が可能か？

という 2 点にある．

ちなみに Ahlfors 函数 $F(z)$ とは次のものをいう．

$$B(D)=\{f(z)\in A(D): f(a)=0, a\in D, |f(z)|\leqq 1, z\in D\}$$

とするとき, $B(D)$ の中で $\mathrm{Re}f'(a)$ を最大にする函数 $f(z)$ を見い出せ, という極値問題の一意的な解 $F(z)=K(z,\overline{a})/L(z,a)$ を Ahlfors 函数という．このとき極値は $F'(a)=2\pi K(a,\overline{a})$ で与え

られる．$n=0$ の場合に Nehari 問題が解けると

$$\hat{B}(D)=\{f(z)\in A(D):f'(a)=0,a\in D,|f(z)|\leqq\sigma(z),z\in\partial D\}$$

とするとき, $\hat{B}(D)$ の中で $\mathrm{Re}f'(a)$ を最大にする函数 $f(z)$ を見い出せ, という極値問題の一意的な解は $\hat{F}(z)=K_\lambda(z,\overline{a})/L_\lambda(z,a)$ であり極値は $\hat{F}'(a)=2\pi K_\lambda(a,\overline{a})$ で与えられることが分かる．この極値函数 $\hat{F}(z)$ は Ahlfors 函数 $F(z)$ の一つの拡張である．一般に Nehari 問題を解くことは大変困難であると思われる．以下においては Nehari 問題に関連するいくつかの結果を紹介する ([U]).

定理 1. z の函数として核 $L^{[n]}(z,a)$ が閉領域 $\overline{D}$ 内に零点を持たないとき, 核 $L_\lambda^{[n]}(z,a)$ が $\overline{D}$ 内に零点を持たない必要十分条件は, $L_\lambda^{[n]}(z,a)=L_\mu^{[n]}(z,a)$ となる $\mu(z)$ が W_n 内に存在することである．

証明. 十分条件は補題3から簡単に分かるので必要条件のみを示す．族 W_n に属する weight $\mu(z)$ を次のように構成する

$$P(z)=\frac{L_\lambda^{[n]}(z,a)}{L^{[n]}(z,a)},\ z\in D,\ |P(z)|^2=\mu(z),\ z\in\partial D\,.$$

留数定理と 2 つの核 $K_\lambda^{[n]}(z,\overline{a})$ と $L_\lambda^{[n]}(z,a)$ の境界関係式を用い

ると, $H^2_\lambda(\partial D)$ の任意の函数 $f(z)$ に対して次のことが分かる

$$\int_{\partial D} f(z)\overline{L^{[n]}_\lambda(z,a)}\frac{1}{\mu(z)}\,|dz| = \frac{1}{i}\int_{\partial D} f(z)K^{[n]}_\lambda(z,\overline{a})\,\frac{L^{[n]}(z,a)}{L^{[n]}_\mu(z,a)}dz = 0.$$

さらに核 $L^{[n]}_\mu(z,a)$ の直交性を用いると

$$\int_{\partial D} f(z)\overline{\left\{L^{[n]}_\lambda(z,a) - L^{[n]}_\mu(z,a)\right\}}\frac{1}{\mu(z)}\,|dz| = 0$$

となる．ここで $f(z) = L^{[n]}_\lambda(z,a) - L^{[n]}_\mu(z,a)$ とすると $\overline{D}$ 上で $L^{[n]}_\lambda(z,a) = L^{[n]}_\mu(z,a)$ が成立することが分かる．従って定理 1 は証明された．

系 ([U-S])**.** 核 $L_\lambda(z,t)$ が $\overline{D}$ 上に零点を持たない必要十分条件は, W_0 に属する $\mu(z)$ が存在して $L_\lambda(z,t) = L_\mu(z,t)$ が成立することである．

定理 1 より Nehari 問題に対して weight $\lambda(z)$ の族 W_n は重要な役割を果たすものと期待される．さらに次の問題が自然に発生する．

問題 2. 核 $L^{[n]}(z,a)$ が零点を持たない領域を特徴付けよ．

この問題が解けるともう一つの Ahlfors 函数の一般化が得られる．つまり

$$B_n(D) = \{f(z) \in B(D) : f(a) \neq 0, f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, a \in D\}$$

とするとき $B_n(D)$ の中で $\mathrm{Re} f^{(2n+1)}(a)$ を最大にする函数 $f(z)$ を見い出せ，という極値問題の解は $F_n(z) = K^{[n]}(z,\overline{a})/L^{[n]}(z,a)$ であり極値は $F_n^{(2n+1)}(a) = 2\pi\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}K^{nn}(a,\overline{a})$ で与えられることが分かる.

また Nehari 問題が解けると Ahlfors 函数のさらなる拡張が得られる．つまり

$$\hat{B}_n(D) = \{f(z) \in \hat{B}(D) : f(a) \neq 0, f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0, a \in D\}$$

とするとき, $\hat{B}_n(D)$ の中で $\mathrm{Re} f^{(2n+1)}(a)$ を最大にする函数 $f(z)$ を見い出せ，という極値問題の解は $\hat{F}_n(z) = K_\lambda^{[n]}(z,\overline{a})/L_\lambda^{[n]}(z,a)$ であり極値は $\hat{F}_n^{(2n+1)}(a) = 2\pi\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}K_\lambda^{nn}(a,\overline{a})$ で与えられることが分かる.

3. 単連結領域における $\lambda(z)$ の特徴付け. 補題2から次のことが簡単に分かる．単連結領域 D において核 $K_\lambda^{[1]}(z,\overline{t})$ が $z=a$ に第一種の零点を持つための必要十分条件は，$\lambda(z)$ に対応する正則函数が $P(z) = cK(z,\overline{a})$($c$ は零でない定数) となることである．次にこの結果の一般化を考える.

補題 4. 単連結領域 D において核 $K_\lambda^{[n]}(z,\overline{t})$ $(n \geqq 2)$ が D 上に $n-1$ 個の第一種の零点 $z = a_k (k = 1, \cdots, n-1)$ を持つとき核 $K_\lambda^{[n]}(z,\overline{t})$ は次のように表現できる

$$
\begin{aligned}
K_\lambda^{[n]}(z,\bar{t}) &= \frac{n!}{P(z)}\frac{K(z,\bar{t})}{K(a_1,\bar{t})}\prod_{k=1}^{n-1}\{R(z,\bar{t})-R(a_k,\bar{t})\} \\
&\times \left[\left\{R(z,\bar{t})+\sum_{l=2}^{n-1}R(a_l,\bar{t})\right\}H_{n-1}(a_1,\bar{t})+H_{n-1}^{[1]}(a_1,\bar{t})\right].
\end{aligned}
$$

ここに$H_{n-1}(a_1,\bar{t})$はD内に零点をもたない高々$n-1$次の$\bar{t}$の多項式である．また$n=2$に対しては$\sum_{l=2}^{n-1}R(a_l,\bar{t})=0$とする．

証明はnに関する数学的帰納法によって出来るが単調な計算なのでここでは省略する．

定理2. 単連結領域Dにおいて核$K_\lambda^{[n]}(z,\bar{t})\,(n \geqq 2)$が$D$上に$n$個の第一種の零点$z=a_k(k=1,\cdots,n)$を持つ (従って特に核$L_\lambda^{[n]}(z,t)$は$D$内に零点を持たない) ならば, $\lambda(z)$に対応する正則函数$P(z)$はn個のSzegő核の積で表される

$$
P(z)=c_n\prod_{k=1}^{n}K(z,\overline{a_k}),\ a_k\in D(k=1,\cdots,n).
$$

ここにc_nはnに依存する零でない定数である．

証明. 核$K_\lambda^{[n]}(z,\bar{t})$は$z=a_1$に第一種の零点を持つから, 補題2 (2)から$\overline{P(t)}=K(a_1,\bar{t})/H_{n-1}(a_1,\bar{t})$が得られる．さらに補題4

による核 $K_\lambda^{[n]}(z,\bar{t})$ の表示に $K_\lambda^{[n]}(a_n,\bar{t})=0$ を適用すると

$$\sum_{l=2}^{n} R(a_l,\bar{t})\,H_{n-1}(a_1,\bar{t})+H_{n-1}^{[1]}(a_1,\bar{t})=0$$

を得る．この両辺を $\bar{t}$ に関して積分すると次式が得られる

$$\prod_{l=2}^{n}\frac{\sqrt{f'(t)}}{1-f(a_l)\overline{f(t)}}=\frac{\bar{c}}{H_{n-1}(a_1,\bar{t})} i.e.,\ c_n\prod_{l=2}^{n}K(t,\overline{a_l})=\frac{1}{\overline{H_{n-1}(a_1,\bar{t})}}.$$

ここに c および c_n は零でない定数である．従って変数 t を z にかえると, 正則函数 $P(z)$ が n 個の Szegő 核の積で表されることが分かる．

系． 領域 D が円板のときは, 核 $K_\lambda^{[n]}(z,\bar{t})\,(n\geqq 1)$ が D 上に n 個の第一種の零点 $z=a_k(k=1,\cdots,n)$ を持つ必要十分条件は, $\lambda(z)$ に対応する正則函数 $P(z)$ が次のように n 個の Szegő 核の積で表されることである

$$P(z)=c_n\prod_{k=1}^{n}K(z,\overline{a_k}),\ a_k\in D(k=1,\cdots,n).$$

ここに c_n は n に依存する零でない定数である．

References

[B] S.Bell, The Cauchy Transform, Potential Theory, and Conformal Mapping, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[N] Z.Nehari, A class of domain functions and some allied extremal problems, Trans.Amer.Math.Soc.,69, pp.161-178, 1950.

[S] S.Saitoh, Theory of reproducing kernels and its applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series,189, Longman Scientific & Technical,UK,1988.

[U] M.Uehara, The Nehari problem for the weighted Szegő kernels, Proceedings of the ISAAC Congress at University of Delaware, Kluwer Academic Publishers,(to appear).

[U-S] M.Uehara and S.Saitoh, Some remarks for the weighted Szegő kernel functions, Math.Japon.,29,pp.887-891,1984.